

MOVIMIENTO PLANO

1. Consideraciones generales
2. Campo de velocidades
3. Campo de aceleraciones
4. Curvas polares: Base y Ruleta
5. Perfiles conjugados
6. Bibliografía

1. Consideraciones generales

Se dice que un sólido S_0 tiene un movimiento plano con respecto a un sistema o sólido de referencia S_1 cuando las velocidades de todos los puntos del sólido son siempre paralelas a un mismo plano fijo π_1 del sistema de referencia. Por tanto, las trayectorias, velocidades y aceleraciones de los diferentes puntos del sólido S_0 estarán contenidas en planos paralelos al plano π_1 de referencia (Figura 1).

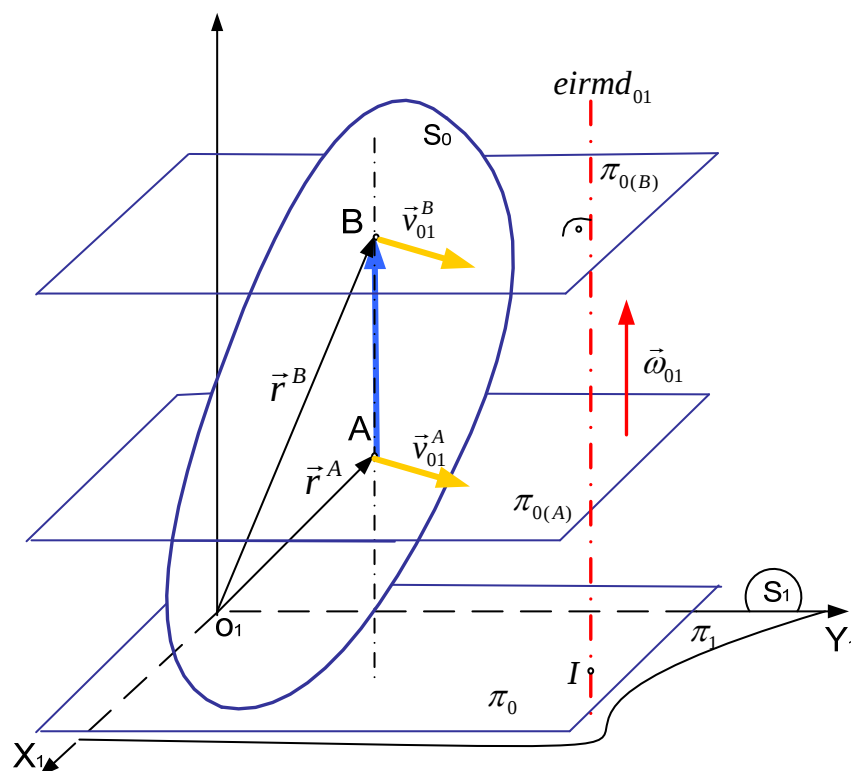


Figura 1: Definición de movimiento plano

El movimiento plano es simplemente un caso particular del movimiento general del sólido y como tal puede tratarse. No obstante, dada la importancia que tiene por su gran

cantidad de aplicaciones –engranajes, rodamientos, mecanismos de leva-seguir, mecanismo biela-manivela, etc- resulta conveniente deducir algunas propiedades particulares que facilitan la resolución de problemas.

Sean A y B dos puntos cualesquiera del sólido S_0 situados sobre una recta perpendicular a π_1 (Figura 1). Teniendo en cuenta la condición de indeformabilidad del sólido, el vector $\overrightarrow{AB}$ que une dichos puntos ha de permanecer constante a lo largo del movimiento plano de S_0 con respecto de S_1 y, por tanto se puede escribir que

$$\left. \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \right)_{S_1} = 0 = \left. \frac{d\overrightarrow{r^B} - d\overrightarrow{r^A}}{dt} \right)_{S_1} = \vec{v}_{01}^B - \vec{v}_{01}^A = \vec{\omega}_{01} \wedge \overrightarrow{AB} \quad (\text{MP}_1)$$

siendo $\vec{\omega}_{01}$ la velocidad angular del sólido S_0/S_1 . El hecho de que se cumpla esta expresión implica las siguientes propiedades:

- $\vec{\omega}_{01} \wedge \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow$ La *velocidad de angular del sólido* $\vec{\omega}_{01}$, si no es nula, es paralela a la recta $\overrightarrow{AB}$ y por tanto *perpendicular al plano* π_1 de referencia del movimiento. Si $\vec{\omega}_{01}$ es nula, entonces el movimiento es una traslación
- $\vec{v}_{01}^B - \vec{v}_{01}^A = 0$; $\vec{v}_{01}^B = \vec{v}_{01}^A \Rightarrow$ Las velocidades de los puntos del sólido situados sobre una recta perpendicular al plano π_1 del movimiento son iguales¹, y por tanto, también sus trayectorias y sus aceleraciones.

De acuerdo con lo anterior, *el movimiento –trayectorias, velocidades y aceleraciones- se repite en planos paralelos al plano* π_1 de referencia. Esto hace que el estudio del movimiento plano se pueda reducir a dos dimensiones, quedando por tanto definido el movimiento del sólido S_0 con respecto a S_1 por el movimiento de un plano π_0 , ligado a S_0 y coincidente con π_1 , con respecto al plano fijo π_1 . Ahora bien, como plano de referencia se puede tomar π_1 o cualquier otro paralelo y ligado a S_1 , siendo entonces el nuevo plano π_0 el coincidente con el paralelo a π_1 y ligado a S_0 .

- La *velocidad de mínimo deslizamiento es nula*, a no ser que el movimiento se reduzca a una traslación. Esto se debe a que es el único valor posible para la velocidad de los

¹ Esta expresión no hace sino confirmar la propiedad demostrada anteriormente del campo de velocidades para los puntos situados sobre rectas paralelas a la velocidad de rotación.

puntos P del eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento (*eirmd*) compatible con la condición de movimiento plano, ya que :

- El *eirmd* es perpendicular al plano π_1 porque es paralelo a $\vec{\omega}_{01}$. Como, por definición, la velocidad de los puntos P del mismo ha de ser paralela a $\vec{\omega}_{01}$, entonces $\vec{v}_{01}^P$ tiene que ser perpendicular al plano π_1 o nula.
- Al ser un movimiento plano, la velocidad de todos los puntos ha de estar contenida en un plano paralelo al π_1 de referencia. Luego, también $\vec{v}_{01}^P$ tiene que ser paralela a π_1 , salvo que sea nula.

El punto *I* de intersección del eje instantáneo de rotación con el plano geométrico en el que se encuentran confundidos los planos π_0 y π_1 se denomina *centro instantáneo de rotación*, siendo $\vec{v}_{01}^I = \vec{0}$

2. Campo de velocidades

Como se ha indicado anteriormente, el movimiento plano del sólido S_0 con respecto al sólido de referencia S_1 ($O_1X_1Y_1Z_1$) queda reducido al estudio del movimiento de un plano π_0 ligado a S_0 que desliza sobre un plano π_1 ligado a S_1 (Figura 2). Como la velocidad angular $\vec{\omega}_{01}$ tiene dirección constante perpendicular al plano del movimiento, es frecuente trabajar con su valor escalar ω_{01} .

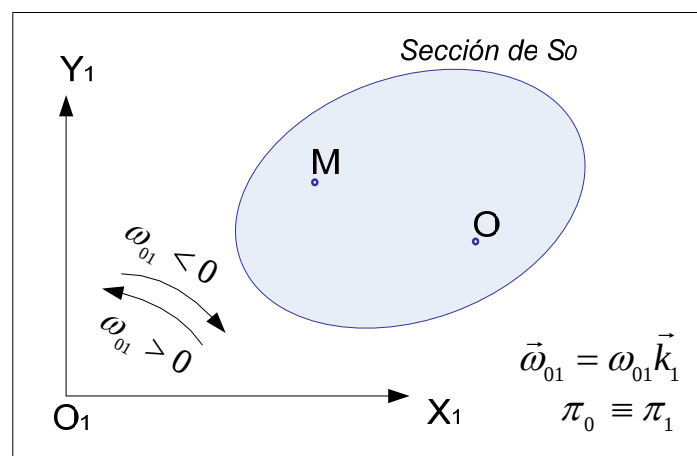


Figura 2: Reducción del movimiento plano a dos dimensiones

Sean M y O dos puntos cualesquiera del plano π_0 , de acuerdo con la expresión del campo de velocidades del sólido, se cumple que

$$\vec{v}_{01}^M = \vec{v}_{01}^O + \vec{\omega}_{01} \wedge \overrightarrow{OM} \quad (\text{MP}_2)$$

Expresión que indica que el movimiento del plano π_0 , en cuanto al campo de velocidades se refiere, se puede interpretar como una traslación en la que todos los puntos del plano π_0 tienen la velocidad correspondiente al punto de referencia elegido, en nuestro caso $\vec{v}_{01}^O$, más una rotación con $\vec{\omega}_{01}$ alrededor de un eje que pasa por O y es perpendicular a dicho plano (Figura 3).

Nótese que al ser $\vec{\omega}_{01}$ siempre perpendicular a $\overrightarrow{OM}$, el término $\vec{\omega}_{01} \wedge \overrightarrow{OM}$ es un vector contenido en el plano del movimiento, perpendicular a $\overrightarrow{OM}$ y de sentido el obtenido al girar 90° el vector $\overrightarrow{OM}$ en el sentido definido por $\vec{\omega}_{01}$ (contrario de las agujas del reloj si $\vec{\omega}_{01} > 0$ y en el sentido de las agujas del reloj si $\vec{\omega}_{01} < 0$), siendo su módulo $|\vec{\omega}_{01}| |\overrightarrow{OM}|$. En definitiva, se puede decir que el vector resultante de esta operación es el que se obtiene a partir de rotar el vector $\overrightarrow{OM}$ noventa grados en el sentido definido $\vec{\omega}_{01}$, y de variar su módulo al multiplicarlo por el escalar $|\vec{\omega}_{01}|$.

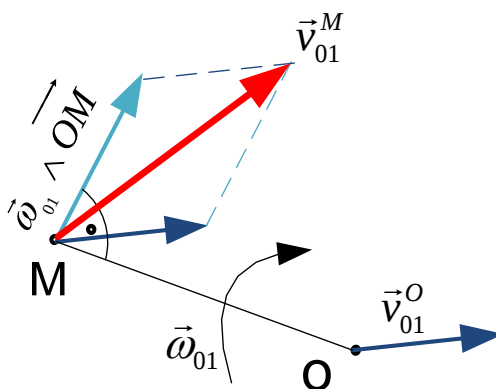


Figura 3: Campo de velocidades en el movimiento plano

Si en lugar de tomar como punto de referencia para el campo de velocidades un punto cualquiera como el O, se toma el punto I centro instantáneo de rotación del movimiento, la expresión (MP_2) del campo de velocidades queda de la forma

$$\vec{v}_{01}^M = \underbrace{\vec{v}_{01}^I}_0 + \vec{\omega}_{01} \wedge \overrightarrow{IM} = \vec{\omega}_{01} \wedge \overrightarrow{IM} \quad (\text{MP}_3)$$

Expresión que indica que el campo de velocidades, en cada instante, es el que corresponde a un giro alrededor del centro instantáneo de rotación I. Es decir, el

movimiento transcurre como si π_0 girase alrededor del punto I con $\vec{\omega}_{01}$. Análogamente al caso anterior, conocida $\vec{\omega}_{01}$ y la posición de I , en la figura 4 se determina la velocidad del punto M .

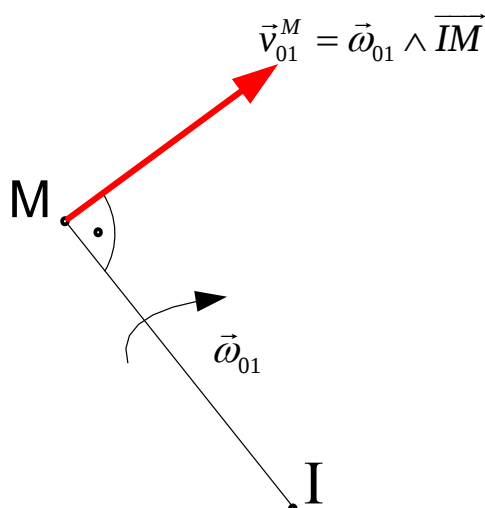


Figura 4: Campo de velocidades con el centro instantáneo de rotación I

En general, las velocidades de los puntos varían a lo largo del tiempo y con ellas la posición del punto I , de ahí el calificativo de *instantáneo*. De acuerdo con lo expuesto, a continuación se presentan algunas propiedades adicionales de orden práctico:

- Si se conoce la velocidad $\vec{v}_{01}^M$ de un punto y la posición de I se puede determinar la velocidad angular. En efecto, la dirección $\vec{\omega}_{01}$ se sabe que es constante y perpendicular al plano del movimiento, el módulo es

$$|\vec{\omega}_{01}| = \frac{|\vec{v}_{01}^M|}{|\overline{IM}|} \quad (\text{MP}_4)$$

y el sentido de giro el que lleve a hacer coincidir los sentidos de $\vec{v}_{01}^M$ y de $\overline{IM}$ mediante un giro de este último de 90°

- Análogamente, mediante la expresión (MP_4) y teniendo en cuenta lo expuesto en cuanto los sentidos de giro, se puede determinar la posición del centro instantáneo I si se conocen la velocidad $\vec{v}_{01}^M$ de un punto y la velocidad angular $\vec{\omega}_{01}$
- Como el centro instantáneo de rotación I está situado sobre la recta perpendicular a la velocidad de cualquier punto M , trazada por dicho punto (Figura 4), si se conocen las direcciones de las velocidades de dos puntos O y M , la posición de I viene

determinada por la intersección de las perpendiculares a dichas direcciones trazadas por los puntos O y M respectivamente (Figura 5).

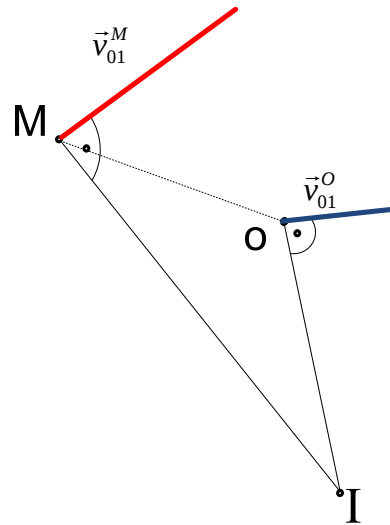


Figura 5: Campo de velocidades con el centro instantáneo de

Sin embargo, para definir el campo de velocidades es necesario conocer además la velocidad de rotación $\vec{\omega}_{01}$ o el módulo y sentido de la velocidad de uno de los puntos.

- Las velocidades de los diferentes puntos de la recta IM son paralelas entre sí, perpendiculares a IM y de módulo proporcional a la distancia del punto considerado al centro instantáneo I. Por tanto, las velocidades de todos los puntos situados a la misma distancia de I tienen el mismo módulo (Figura 6).

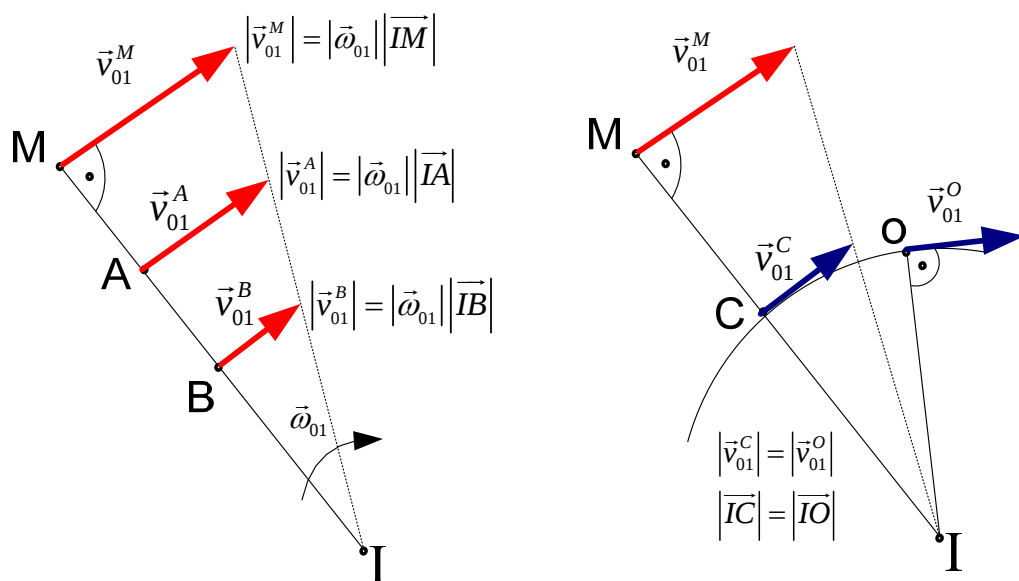


Figura 6: Propiedades del movimiento plano

3. Campo de aceleraciones

La expresión del campo de aceleraciones de un sólido con movimiento general es

$$\vec{a}_{01}^M = \vec{a}_{01}^O + \vec{\alpha}_{01} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega}_{01} \wedge (\vec{\omega}_{01} \wedge \overrightarrow{OM}) \quad (\text{MP}_5)$$

y desarrollando el doble producto vectorial, se tiene

$$\vec{a}_{01}^M = \vec{a}_{01}^O + \vec{\alpha}_{01} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega}_{01}(\vec{\omega}_{01} \cdot \overrightarrow{OM}) - \vec{\omega}_{01}^2 \overrightarrow{OM} \quad (\text{MP}_6)$$

Ahora bien, como ya se ha visto anteriormente, en el movimiento plano los vectores $\vec{\omega}_{01}$ y $\overrightarrow{OM}$ son perpendiculares, por lo que el término $(\vec{\omega}_{01} \cdot \overrightarrow{OM})$ es nulo. Además, como el vector $\vec{\omega}_{01}$ tiene la dirección constante perpendicular al plano del movimiento, el vector aceleración angular $\vec{\alpha}_{01} = \frac{d\vec{\omega}_{01}}{dt}$ tiene la misma dirección. De acuerdo con esto, la expresión del campo de aceleraciones en el movimiento plano se puede escribir de la forma

$$\boxed{\vec{a}_{01}^M = \vec{a}_{01}^O + \vec{\alpha}_{01} \wedge \overrightarrow{OM} - \vec{\omega}_{01}^2 \overrightarrow{OM}} \quad (\text{MP}_7)$$

Expresión que indica que el movimiento del plano π_0 , en cuanto al campo de aceleraciones se refiere, se puede interpretar en cada instante como una traslación en la que todos los puntos del plano π_0 tienen la aceleración correspondiente al punto O de referencia elegido más una rotación alrededor de un eje que pasa por O y es perpendicular a dicho plano con velocidad angular $\vec{\omega}_{01}$ y aceleración angular $\vec{\alpha}_{01}$.

Para finalizar conviene aclarar un error que se produce con cierta frecuencia. Se ha visto al estudiar el campo de velocidades que el plano móvil π_0 se comporta como si estuviese girando alrededor de I con velocidad angular $\vec{\omega}_{01}$. Parece lógico suponer que esta propiedad se seguirá cumpliendo para las aceleraciones, sin embargo esta interpretación es incorrecta. La aceleración del centro instantáneo de rotación $\vec{a}_{01}^I$ en general no es nula, ya que dicho punto I no será centro instantáneo en otro instante, teniendo en ese nuevo instante una velocidad distinta de cero y habiendo experimentado, por tanto, un cambio de velocidad.

4. Curvas polares: Base y Ruleta

Como la dirección del eje instantáneo de rotación es constante y perpendicular al plano del movimiento, las axoides fija y móvil del movimiento plano de S_0 con respecto de S_1

son superficies cilíndricas, en el sentido generalizado de superficie cilíndrica, que es la superficie construida con rectas paralelas entre sí, apoyadas sobre una curva C plana. La curva intersección de la axoide fija con el plano π_1 se denomina *base* o *polar fija*, y es el lugar geométrico de los centros instantáneos de rotación I considerados como pertenecientes al plano π_1 . La curva intersección de la axoide móvil con el plano π_0 se denomina *ruleta* o *polar móvil*, y es el lugar geométrico de los centros instantáneos de rotación I considerados como pertenecientes al plano π_0 .

Según se demostró al estudiar el movimiento general del sólido, las axoides son superficies tangentes, siendo el movimiento de la axoide móvil con respecto de la fija una rotación alrededor de la generatriz común de contacto (*eirmd*), estando la velocidad angular contenida en el plano tangente común a ambas superficies. Por tanto, teniendo en cuenta la teoría de movimiento de sólidos en contacto, *la base y la ruleta son curvas tangentes en el centro instantáneo de rotación I , siendo el movimiento de la ruleta con respecto de la base un movimiento de rodadura sin deslizamiento.*²

5. Perfiles conjugados

Se considera el movimiento del plano π_0 sobre el plano π_1 , siendo C_0 y C_1 respectivamente la ruleta y la base de este movimiento. Se considera ahora una curva cualquiera P_0 fija al plano móvil π_0 y arrastrada por él en su movimiento. A lo largo de este movimiento, dicha curva ocupará distintas posiciones con respecto al plano π_1 , pudiendo trazar la envolvente P_1 a todas ellas en el plano π_1 . La pareja de curvas P_0 , P_1 se dice que forman una pareja de *perfiles conjugados*, siendo en cada instante P_0 tangente a P_1 .

Sea M el punto de contacto en cada instante de dicha pareja de perfiles conjugados. Se puede demostrar que la velocidad $\vec{v}_{01}^M$, si no es nula, tiene la dirección de la tangente común a la pareja de perfiles en dicho punto³.

De acuerdo con esto, el centro instantáneo de rotación I del movimiento estará situado sobre la normal común a la pareja de perfiles conjugados por el punto de contacto.

² Ampliar información en la sección 5.2. de Prieto Alberca, M. (1990)
<http://ocw.upm.es/ingenieria-agroforestal/mecanica-y-mecanismos/Contenidos/Teoria/Tema4.3.Movimiento plano-paralelo-Modo%20de%20compatibilidad.pdf>
<http://ocw.upm.es/ingenieria-agroforestal/mecanica-y-mecanismos/simulaciones>

³ Ampliar información en la sección 5.3. de Prieto Alberca, M. (1990)

Este hecho constituye la propiedad fundamental que posee la pareja de perfiles conjugados y se puede utilizar para determinar gráficamente la posición del centro instantáneo de rotación. Basta con conocer dos parejas de perfiles conjugados para encontrar dicho punto en la intersección de las normales respectivas a cada pareja.

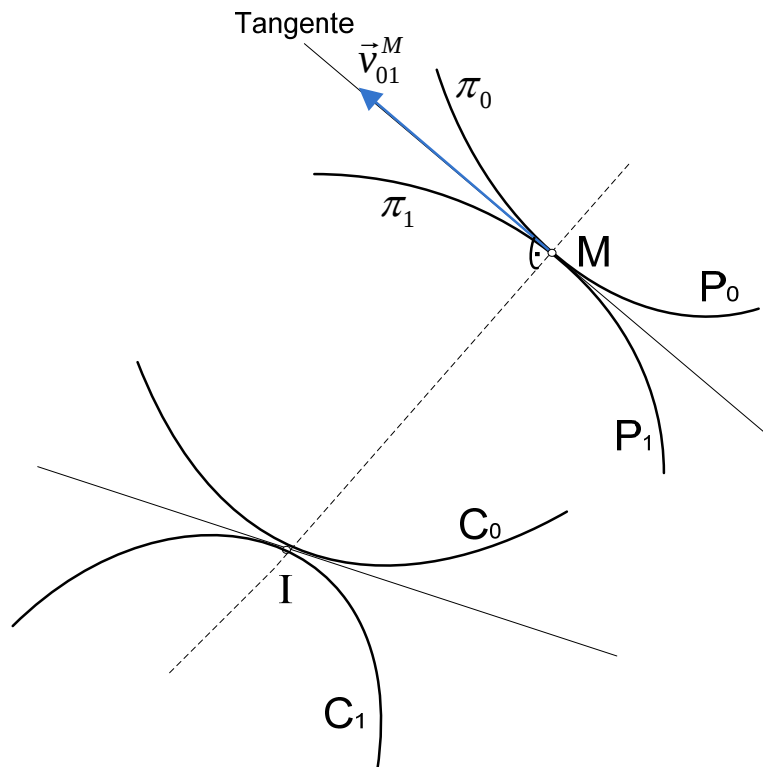


Figura 7: Perfiles conjugados

El movimiento del plano π_0 con respecto del plano π_1 se puede interpretar como una rodadura con deslizamiento de P_0 con respecto de P_1 , siendo $\vec{v}_{01}^M$ la velocidad de deslizamiento. Si $\vec{v}_{01}^M$ es nula, entonces los perfiles conjugados son la base y la ruleta y el movimiento es una rodadura pura de la ruleta sobre la base.

Existen numerosas aplicaciones de ingeniería en las que se utilizan los perfiles conjugados para transmitir el movimiento: engranajes, mecanismos de leva y seguidor, etc. En las siguientes direcciones se pueden visualizar algunos de estos mecanismos:

- <http://www.emc.uji.es/d/IngMecDoc/Mecanismos/Levas/LevaRodillo.html>
- <http://www.uclm.es/profesorado/porrasysoriano/animaciones/planetarios.html>
- <http://www.artiludios.com/artiludi/curiosid/reductora/reductora.html>
- <http://www.emc.uji.es/d/IngMecDoc/Mecanismos/Engranajes/EngrCilindr.html>



6. Bibliografía

- Bedford, A., Fowler,W. (2008), Mecánica para Ingeniería. Dinámica. Pearson Educación. México
- Meriam, J.L., Kraige,W.(1998). Dinámica, Reverté
- Prieto Alberca, M. (1990), *Curso de Mecánica Racional: Cinemática y Estática*, ADI, Madrid
- Riley,W.F. y Sturges, L.D.(1996). *Ingeniería Mecánica: Dinámica*, Reverté
- Shames, Irving H.(1998), *Mecánica para Ingenieros: Dinámica*, Prentice Hall, Madrid